

Gruppenübung 4

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

mit Hilfe der Funktion $V(x_1, x_2) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

Aufgabe 2 Sei $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit einem strikten Minimum in 0. Betrachten Sie das Newtonsche System

$$\ddot{x} = -\nabla U.$$

Ist 0 eine Ruhelage des Systems? Untersuchen Sie gegebenenfalls die Stabilität dieser Ruhelage.

Aufgabe 3 Im folgenden betrachten wir das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wobei $m < n$ ist. Wir nehmen an dass (A, C) beobachtbar ist und dass die Gleichung

$$A^T P + PA = -C^T C$$

für ein positiv definites P erfüllt ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage 0 aussagen?

Aufgabe 4 Wir betrachten ein Pendel der Länge l unter Einfluss der Gravitation wie abgebildet in Abbildung 1. Wir nehmen an, dass die Aufhängung linear gedämpft ist und die Dämpfungskonstante $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ nicht-negativ ist.

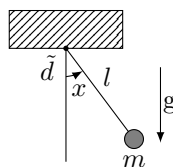


Abbildung 1: Pendel mit Länge l .

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems.

b) Schreiben Sie das System in Zustandsform, wobei als neue Zustände $x_1 = x$ und $x_2 = \frac{1}{\omega} \dot{x}$ mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ gewählt werden sollen. Verwenden sie die Abkürzung $d = \frac{\tilde{d}}{ml^2}$ um

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega \sin x_1 - d x_2\end{aligned}$$

zu erhalten.

c) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems.

- d) Bestimmen Sie die Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen mit der ersten Methode von Lyapunov in Abhängigkeit von d . Bestimmen Sie zusätzlich die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage bei $(0,0)$ mit der zweiten Methode von Lyapunov. Achten Sie bei der Wahl der Lyapunovfunktion auf mechanische Eigenschaften des Systems.
- e) Bestimmen Sie eine Menge, die zum Einzugsbereich der Ruhelage $(0,0)$ gehört. Zeichnen Sie dazu zuerst mit den vorher berechneten Informationen ein Phasenportrait des Systems. Bestimmen Sie dann die Menge, auf der die Lyapunovfunktion V aus d) positiv und gleichzeitig $\dot{V}$ negativ (semi)definit ist. Ist diese Menge ein Einzugsbereich der Ruhelage? Begründen sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie eine Abschätzung des Einzugsbereichs mit Hilfe dieser Lyapunovfunktion.